МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ТЕЛА, ПОГРУЖЕННОГО В ЖИДКОСТЬ

На тело, погруженное в жидкость, помимо силы тяжести действует выталкивающая (или *архимедова*) сила. Предположим, что погружаемый предмет имеет форму конуса высотой H и углом раствора 2α, и соотношение плотностей жидкости ($\rho_{ж}$) и материала, из которого он изготовлен (ρ), таково, что тело находится в равновесии, причем часть его выступает над поверхностью жидкости (рис. 1). Определим глубину погружения тела h_o в равновесном состоянии.

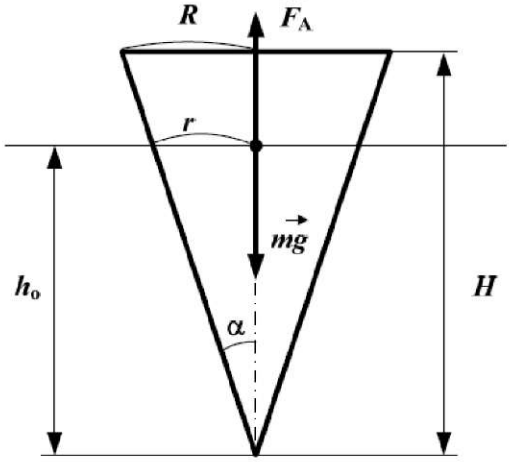

Рис. 1.

К определению глубины погружения тела в положении равновесия: H – высота тела, 2α – угол раствора конуса, R – радиус основания, h_o – глубина погружения в положении равновесия, r – радиус сечения поверхностью жидкости, $\vec{F}_A$ – сила Архимеда, $m\vec{g}$ – сила тяжести.

Условие равновесия тела в жидкости $\vec{F}_A + m\vec{g} = 0$, где m – масса тела – может быть найдена по его плотности и объему:

$$m = \rho V = \rho \cdot \frac{1}{3}\left(\pi R^2\right) \cdot H = \frac{\pi\rho}{3} H \cdot \left(H \cdot \operatorname{tg}\alpha\right)^2 = \frac{\pi\rho}{3} \cdot \operatorname{tg}^2\alpha \cdot H^3. \qquad (1)$$

Сила Архимеда:

$$F_A = \rho_{ж} g \cdot \Delta V,$$

где ΔV – объем погруженной части тела в положении равновесия

$$F_A = \rho_{ж} g \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\pi r^2\right) \cdot h_o = \frac{\pi \rho_{ж}}{3} g h_o \cdot \left(h_o \cdot \mathrm{tg}\,\alpha\right)^2 = \frac{\pi \rho_{ж}}{3} \cdot \mathrm{tg}^2\,\alpha \cdot h_o^3 \cdot g\,. \quad (2)$$

На основании (1) и (2) получим:

$$h_o = H \cdot \sqrt[3]{\frac{\rho}{\rho_{ж}}}\,. \quad (3)$$

Выведем конус из положения равновесия (рис. 2) и отпустим его. При движении возникает сила сопротивления, направленная противоположно скорости тела. Уравнение движения

$$m\vec{a} = \vec{F}_A + m\vec{g} + \vec{F}_{сопр}\,.$$

Направим ось Ox вверх, начало отсчета совместим с положением равновесия (на рис. 2 оно показано в виде горизонтальной пунктирной линии) и введем обозначения: x – смещение тела от положения равновесия и V_x – объем погруженной части тела в данный момент времени. Будем считать, что сила сопротивления прямо пропорциональна скорости тела и площади его поверхности, соприкасающейся с жидкостью S_x.

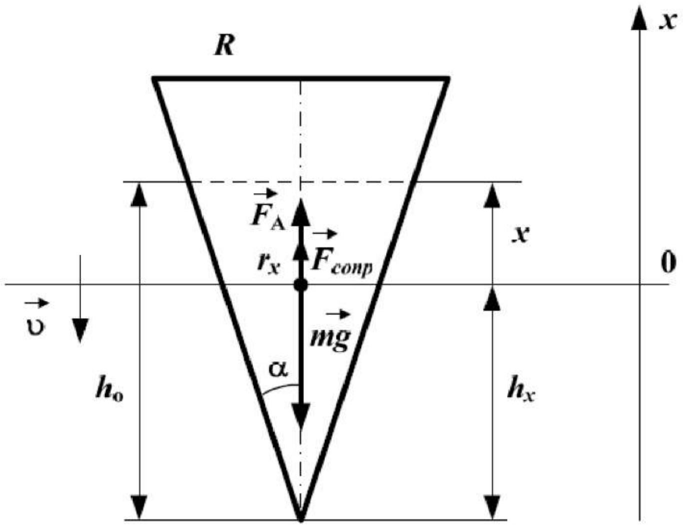

Рис. 2.

К составлению уравнения движения тела: x – смещение тела от положения равновесия; h_x – глубина погружения в данный момент времени; r_x – радиус сечения поверхностью жидкости.

Дифференциальное уравнение движения:

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \rho_{ж} \cdot g \cdot V_x - mg - f \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot S_x\,,$$

где f – коэффициент пропорциональности в выражении для силы сопротивления $F_{сопр\ x} = -f \cdot \upsilon_x \cdot S_x$.

Расписывая S_x и V_x через $h_x = h_o - x$ по аналогии с (2), получим

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\pi \cdot \rho_{ж}}{3} \cdot \mathrm{tg}^2\,\alpha \cdot (h_o - x)^3 \cdot g - mg - f \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \pi \cdot \frac{\mathrm{tg}^2\,\alpha}{\sin\alpha} \cdot (h_o - x)^2. \tag{4}$$

После небольших преобразований выражение (4) принимает вид:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -g + \frac{\pi \cdot \mathrm{tg}^2\alpha \cdot (h_o - x)^2}{m} \cdot \left(\frac{\rho_{ж} g}{3} \cdot (h_o - x) - \frac{f}{\sin\alpha} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right). \tag{5}$$

$$m = \frac{\pi\rho}{3} \cdot \mathbf{tg}^2\,\alpha \cdot H^3$$

$$h_o = H \cdot \sqrt[3]{\frac{\rho}{\rho_{ж}}}$$

Анализ процесса показывает, что движение тела является колебательным, так как при его смещении равнодействующая сил всегда будет направлена к положению равновесия, т.е. является возвращающей силой. Кроме того, в этой модели интересно отметить два момента: *во-первых*, скорость, с которой тело проходит положение равновесия, не зависит от направления движения и является максимальной по величине, и, *во-вторых*, смещение тела вверх и вниз от равновесного положения неодинаково. Докажем оба утверждения для случая отсутствия силы сопротивления, когда полная механическая энергия системы (тело+жидкость) остается неизменной.

Исходными данными для этой модели являются: высота конуса H, плотность материала ρ, из которого он изготовлен, и угол раствора 2α; плотность жидкости $\rho_{ж}$; коэффициент сопротивления f; начальное смещение тела от положения равновесия x_o (несколько значений) и его скорость в начальный момент времени. Необходимо также задать (или рассчитать) шаг Δt. Пример числовых данных:

H=0,25 *м*; ρ=500 *кг/м*^{3}; 2α=60°; $\rho_{ж}$=1000 *кг/м*^{3}; f=15 $\frac{H \cdot c}{м^3}$;

x_o=0,05 *м*, 0,1 *м*, 0,15 *м*; υ_{ox}=0 *м/с*; $t_o \div t_{\max}$=[0;10] *с*.

1. Построить графики колебательного процесса (зависимости скорости и смещения от времени) на различных диаграммах. Определить экспериментально, когда колебания перестают быть гармоническими. В чем это проявляется?

2. Рассчитать равнодействующую сил в те же моменты времени, что и смещение, и построить график зависимости $F_{результ_x} = f(x)$.

4. Построить график зависимости смещения тела от фазы колебаний.

5. Построить фазовую диаграмму, т.е. зависимость скорости тела от смещения в соответствующие моменты времени.